• Έστω ένας V δχ με $S \subseteq V$. Το $\langle S \rangle$ συμβολίζει τον υπόχωρο που γεννάται από τα στοιχεία του S.

$S = \{v_1, \dots, v_k\}$ $\quad \langle S \rangle = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}(k)\}$

• Το S γεννά-παράγει τον $\langle S \rangle$

• Το $S \subseteq V$ καλείται γραμμικώς εξαρτημένο αν $S' = \{v_1, \dots, v_m\}$ υπάρχουν όχι όλοι μηδέν πραγματικοί αριθμοί ώστε

$$\vec{0} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

Αποτέλεσμα αυτού αν $a_1 \neq 0$ έχουμε $\frac{a_1 v_1}{a_1} = \frac{-a_2 v_2}{a_1} - \dots - \frac{a_m v_m}{a_1} \Rightarrow$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

• Άρα το v_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων $\Rightarrow v_1 \in \langle \{v_2 \dots v_m\} \rangle$
Δηλαδή παράγεται από τα υπόλοιπα $\langle \{v_1, v_2 \dots v_m\} \rangle = \langle \{v_2 \dots v_m\} \rangle$

▶ Δηλαδή, ψάχνουμε το ελάχιστο υποσύνολο, το οποίο γεννά τον υπόχωρο.

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο S ενός διανυσματικού χώρου V, θα καλείται <u>γραμμικά ανεξάρτητο</u> αν δεν μπορούμε να γράψουμε το μηδενικό διάνυσμα σαν μη-τετριμμένο γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Αν το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, κανένα στοιχείο του δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Άρα τα χρειάζεται όλα.

π.χ. $\mathbb{R}_2[x]$ $\quad S=\{x+1, x^2+x, 2x+5\}$ Είναι το S γραμμικά ανεξάρτητο;

$0 = \alpha(x+1)+\beta(x^2+x)+\gamma(2x+5)$ $\quad\big|\quad \beta=0 \quad \alpha+\beta+2\gamma=0 \Rightarrow \alpha+2\gamma=0$

$0 = \beta x^2+(\alpha+\beta+2\gamma)x+\alpha+5\gamma$ $\quad\big|\quad \alpha+5\gamma=0 \Rightarrow 3\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0$

$\alpha=0$

- Το S γεννά τον $\mathbb{R}_2[x]$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = r_1(x+1)+r_2(x^2+x)+r_3(2x+5)$ (βρείς r_1, r_2, r_3 συναρτήσει α,β,γ)

$\boxed{\alpha=r_2}$

$\beta = r_1+r_2+2r_3 \Rightarrow \beta = r_1+\alpha+2r_3 \Rightarrow r_1=\beta-\alpha-2r_3 \Rightarrow r_1=\beta-\alpha-\frac{2}{3}(\gamma+\alpha-\beta)$ ...

$\gamma = r_1+5r_3 \Rightarrow \gamma=\beta-\alpha-2r_3+5r_3 \Rightarrow r_3=\frac{\gamma+\alpha-\beta}{3}$

$S=\{(x+1),(x^2+x),(2x+5)\}$ 1) γραμμικά ανεξάρτητο 2) γεννά το χώρο.

Ορισμός: Έστω $Y\le V$ ενός δ.χ κ' $S\subseteq Y$ ώστε το S να είναι γραμμικά ανεξάρτητο κ' να γεννά τον Y. Τότε το S καλείται βάση του Y

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο προηγούμενο π.χ. το $S=\{x+1, x^2+x, 2x+5\}$ αποτελεί βάση. Αλλά κ' το $S'=\{1,x,x^2\}$ αποτελεί βάση.

Πρόταση: Έστω $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ μία βάση του δ.χ. V. Τότε κάθε στοιχείο u του V γράφεται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Απόδειξη: Έστω $u\in V$. Επειδή το S είναι βάση, γεννά το χώρο κ' είναι κ' γραμμικά ανεξάρτητο.

$V=\langle S\rangle \Rightarrow u\in\langle S\rangle \Rightarrow u=r_1v_1+r_2v_2\cdots+r_kv_k$ κ' κάποιους πραγματικούς αριθμούς r_1, r_2, r_k

Έστω ότι το v έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις με τα στοιχεία τους $v = r_1' v_1 + \dots + r_k' v_k$. Τα αφαιρούμε.

$$\bar{0} = (r_1 - r_1')v_1 + \dots + (r_k - r_k')v_k \left.\right\} \Rightarrow \begin{matrix} r_1 - r_1' = 0 \\ r_2 - r_2' = 0 \\ \vdots \\ r_k - r_k' = 0 \end{matrix}$$

S είναι γραμμικά ανεξάρτητο

Άτοπο αφού $r_1 = r_1'$ ⋮

π.χ. Δίνεται ο $M((2,3),\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ $M(2\times3,\mathbb{R})$ είναι δ.χ.

Δ.ο. το S αποτελεί βάση

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 + \varepsilon v_5 + \zeta v_6 \quad \langle S \rangle = M(2\times3,\mathbb{R})$$

Αν είναι κ' γραμμικά ανεξάρτητος τότε θα είναι
$r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + r_4 v_4 + r_5 v_5 + r_6 v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ βάση.

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_i = 0.$$

Ερώτημα: Έστω S κ' S' δύο πεπερασμένες βάσεις ενός δ.χ. V. Έχουν τα S κ' S' το ίδιο πλήθος στοιχείων;

Θεώρημα: Έστω $Y \leq V$ δχ κ' S μια βάση του Y με k στοιχεία. Τότε κάθε άλλη βάση του Y θα έχει ακριβώς k στοιχεία.

Ορισμός: Έστω V δ.χ κ' $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ μια βάση του. Ο αριθμός k καλείται διάσταση του V κ' συμβολίζεται με $\dim V = k$.

π.χ. (i) $\dim \mathbb{R}^n = n$ Διότι το $S = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots (0,\dots,0,1)\}$ αποτελεί βάση κ' αυτή καλείται η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Πρόταση: Έστω V δ.χ. κ' $S \subseteq V$ γραμμικά ανεξάρτητο. Αν το S είναι μέγιστο γραμμ. ανεξ. (δηλαδή αν προσθέσει κ' άλλο ένα οποιοδήποτε μη-μηδενικό παύει να είναι γρ. ανεξ.), τότε θα είναι βάση.

Απόδειξη: Αρκεί νδο το S γεννά το χώρο.
Έστω $Y = \langle S \rangle$. Αν $V - Y \neq 0$, τότε $\exists u \in V - Y$ κ' το $u \notin Y$. Το u δεν είναι γραμμ. συνδυασμός των στοιχείων του S. Αυτό σημαίνει ότι το υποσύνολο $S \cup \{u\}$ είναι γραμμ. ανεξ. Άτοπο, διότι το S είναι μέγιστο.

Πρόταση: Έστω V δ.χ. κ' $S \subseteq V$, το οποίο γεννά το χώρο, $\langle S \rangle = V$.
Αν το S είναι ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα, τότε το S αποτελεί βάση.

Απόδειξη: Αρκεί νδο το S είναι γραμμ. ανεξ. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι.

Άρα $\exists u_i \in S$ ώστε το u_i να είναι γραμμ. συνδυασμός των υπολοίπων
$\langle S \rangle = \langle S - \{u_i\} \rangle$. Αυτό σημαίνει ότι το S δεν είναι ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα. Άτοπο

Πόρισμα: Έστω $\dim V = k$ κ' $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ μία βάση του. Κάθε υποσύνολο του V, το οποίο περιέχει τουλάχιστον $k+1$ στοιχεία είναι γραμμ. εξαρτημένο.

Πόρισμα: Έστω $V = \langle S \rangle$ κ' το S περιέχει k στοιχεία. Τότε $\dim V \leq k$.

Αν $\dim V = k$ κ' $S = \{v_1 \dots v_m\} \subseteq V$ ώστε το S να είναι γρ. ανεξ, τότε $\exists$ βάση S' του V με $S \subseteq S'$.

(Π.Χ.) Να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου Y που γεννάται από το
$S = \{(1, 3, 1, 1), (2, -2, 2, -1), (3, 1, 2, 0)\}$
$Y = \langle S \rangle = \{r_1(1,3,1,1) + r_2(2,-2,2,-1) + r_3(3,1,3,0) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\}$
Για να είναι βάση το S θα πρέπει να είναι γρ. ανεξ. Ελέγχουμε $(0,0,0,0)$
$= (r_1 + 2r_2 + 3r_3, \ldots - 2r_2 + r_3, r_1 + 2r_2 - 3r_3, r_1 - r_2)$

$Y = \langle S \rangle = \{ r(1,3,1,1) + r_2(2,-2,2,-1) + r_3(3,1,3,0) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \}$

Για να είναι βάση το S θα πρέπει να είναι γρ. ανεξ. Ελέγχουμε $(0,0,0,0)$
$= (r_1 + 2r_2 + 3r_3, 3r_1 - 2r_2 + r_3, r_1 + 2r_2 + 3r_3, r_1 - r_2)$

$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 0$
$3r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$
$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 0$
$r_1 = r_2$

$-r_3 - 2r_3 + 3r_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$4r_1 + 4r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = -r_3$
$r_1 = r_2$
$r_2 = -r_3$

Για $r_3 = 1 \Rightarrow r_1 = -1 = r_2$. Βρίσκουμε 3 διαφορετικούς από το 0 ώστε το $(0,0,0,0)$ να είναι γραμμ. συνδυασμός.
$(0,0,0,0) = +(1,3,1,1) + (2,-2,2,-1) - (3,1,3,0)$
$(2,-2,2,-1) = (3,1,3,0) - (1,3,1,1)$

$S' = \{(1,3,1,1), (3,1,3,0)\}$ κ' $Y = \langle S \rangle = \langle S' \rangle$
Το S' είναι γραμμ. ανεξ, διότι $(0,0,0,0) = r_1(1,3,1,1) + r_2(3,1,3,0)$

$0 = r_1 + 3r_2$
$0 = 3r_1 + r_2$
$0 = r_1 + 3r_2$
$0 = r_1 \Rightarrow r_2 = 0$

Άρα το S' είναι γραμμ. ανεξ.
$\dim Y = 2 \quad Y \leq \mathbb{R}^4$

(π.χ) Να επεκτείνετε τη βάση του Y σε βάση του $\mathbb{R}^4$

$S' = \{(1,3,1,1), (3,1,3,0)\}$ $\dim \mathbb{R}^4 = 4$
$S'' = \{(1,3,1,1), (3,1,3,0), (1,0,0,0)\}$ ελέγχουμε αν είναι γρ. ανεξ.

$S''' = \{(1,3,1,1), (3,1,3,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $Y \leq V$. Τότε (i) $\dim Y \leq \dim V$ (ii) $\dim Y = \dim V \Rightarrow Y = V$

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω S βάση του Y. Την επεκτείνουμε σε βάση του V. Άρα το νέο σύνολο θα έχει τα ίδια ή περισσότερα στοιχεία

(ii) $\dim Y = \dim V \Rightarrow$ Μια βάση S του Y είναι κ' βάση του V.
(Διαφορετικά θα προσθέταμε στοιχεία για να συμπληρώσουμε βάση του V.
Τότε θα είχαμε $\dim Y < \dim V$) Άρα $Y = V$